05/04/2017

Το τεστ Kolmogorov - Smirnov

Έστω τα ανεξάρτητα τ.δ. $X_1, \ldots, X_m$ και $Y_1, \ldots, Y_n$ από δύο πληθυσμούς $F_X(x)$ και $F_Y(y)$ αντίστοιχα.

Για τον έλεγχο της $H_0: F_X(x) = F_Y(y)$ v $H_a: F_X(x) \neq F_Y(y)$, το τεστ των K-S χρησιμοποιεί το στατιστικό:

$$D_{m,n} = \sup_t \left| F_m(t) - F_n(t) \right| = \max_i \left| F_m(t_i) - F_n(t_i) \right|$$

ε.α.σ.κ.

όπου, $F_m(t) = (\text{αριθμός των } X_i \leq t)/m$, $F_n(t) = (\text{αριθμός των } Y_i \leq t)/n$ και έχει κατανομή ανεξάρτητη από την κατανομή της H_0.

Όταν η H_0 αληθεύει το $D_{m,n}$ θα πρέπει να είναι μικρό, έτσι απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α, όταν $D_{m,n} > D_{m,n,\alpha}$ από σχετικό πίνακα.

Οι ε.α.σ.κ. υπολογίζονται είτε με ομαδοποίηση των x και y σε κοινές κατηγορίες (παρ. 3), είτε με συνάρτηση των X_i και Y_i σε ένα δείγμα και διάταξη του δείγματος κατά πραγματικό μέγεθος (παρ. 1,2).

Παράδειγμα 1:

$X_1, \ldots, X_9$ και $Y_1, \ldots, Y_{12}$ $\quad H_0: F_X(x) = F_Y(y)$ v $H_a: F_X(x) \neq F_Y(y)$, $\alpha = 0.05$

ΛΥΣΗ

X_i: 7.6 8.4 8.6 8.7 9.3 9.9 10.1 10.6

Y_i: 5.2 5.7 5.9 6.5 6.8 8.2 9.1 9.8 10.8

11.2

12.3 13.4 14.6

$x \leftarrow F_9(t)$: 0 0 0 0 0 1/9 1/9 2/9 3/9 4/9 5/9 5/9 6/9 7/9 8/9 8/9 1

1 1 1

$y \leftarrow F_{12}(t)$: 1/12 2/12 3/12 4/12 5/12 6/12 6/12 6/12 6/12 7/12 7/12 8/12 8/12 8/12

8/12 9/12 9/12 10/12 11/12 1

$F_9(t) - F_{12}(t)$: -3/36 -6/36 -9/36 -12/36 -15/36 -11/36 -14/36 -10/36 -6/36 -9/36 -5/36 -8/36

-2/36 0 4/36 8/36 5/36 9/36 6/36 3/36

0

$$D_{m,n} = D_{9,12} = \max_i \left| F_9(t) - F_{12}(t) \right| = \frac{15}{36} = 0.4166$$

$$D_{m,n,a} = D_{9,12,0.05} = \frac{20}{36} = 0.5556$$

Επειδή $D_{m,n} < D_{m,n,a}$ δεν απορρίπτεται η H_0

Η αλλιώς προσεγγιστικά: $D_{9,12,0.05} = 1.36 \sqrt{\frac{9+12}{9 \cdot 12}} = 0.5997$

↳ απορρίπτεις πιο δύσκολα

Παράδειγμα 2: (7.8)

X_i: $-2, 1, 3, 4, 8, 9, 10$ και Y_i: $-10, -7, -8, -4, -3, -1, 7, -3, 28, -3$

$H_0: F_X(x) = F_Y(y)$ v $H_a: F_X(x) \neq F_Y(y)$

(να ελέγξω δηλαδή αν προέρχονται από την ίδια κατανομή)

ΛΥΣΗ

	y	y	y	y	y	y	y	x	y	x	x	x	y	x	x	x	y
	-10	-8	-7	-4	-3	-3	-3	-2	-1	1	3	4	7	8	9	10	28
$x \leftarrow F_7(t)$:	0	0	0	0			0	1/7	1/7	2/7	3/7	4/7	4/5	5/7	6/7	1	1
$y \leftarrow F_{10}(t)$:	1/10	2/10	3/10	8/10			7/10 ↑	7/10	8/10	8/10	8/10	9/10	9/10	9/10	9/10	9/10	1

$$D_{m,n} = D_{7,10} = \max_i \left| F_7(t) - F_{10}(t) \right| = 0.7$$

$$D_{7,10,0.05} = \frac{43}{70} = \underline{\underline{0.61}}$$

Επειδή $0.7 > 0.61$ απορρίπτουμε την H_0

Προσεγγιστικά: $D_{7,10,0.05} = 1.36 \sqrt{\frac{7+10}{7 \cdot 10}} = \underline{\underline{0.67}}$

Παράδειγμα 3:

40 μαθητές ← μέθοδος M_1

50 μαθητές ← μέθοδος M_2

Είναι οι M_1, M_2 το ίδιο αποτελεσματικές; ($a = 0.05$)

βαθμός	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
H_1 (συχνότητες)	0	0	4	8	13	10	4	0	1	0	40 = n
H_2 (συχνότητες)	1	2	3	10	20	10	3	0	0	1	50 = m

τιμές t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{40}(t)$	0	0	$4/40$ 0.1	$\frac{4+8}{40}$ 0.3	$\frac{4+8+13}{40}$ 0.625	0.875	0.975	0.975	1	1
$F_{50}(t)$	$1/50$ 0.02	$3/50$ 0.06	$6/50$ 0.12	$16/50$ 0.32	0.72	0.92	0.98	0.98	0.98	1

$$D_{40,50} = 0.095$$

$$D_{40,50,0.05} = 1.36\sqrt{\frac{40+50}{40 \cdot 50}} = 0.29$$

Επειδή $0.095 < 0.29$ δεν απορρίπτεται η H_0